天學闡微

天學闡微卷之三

王家弼

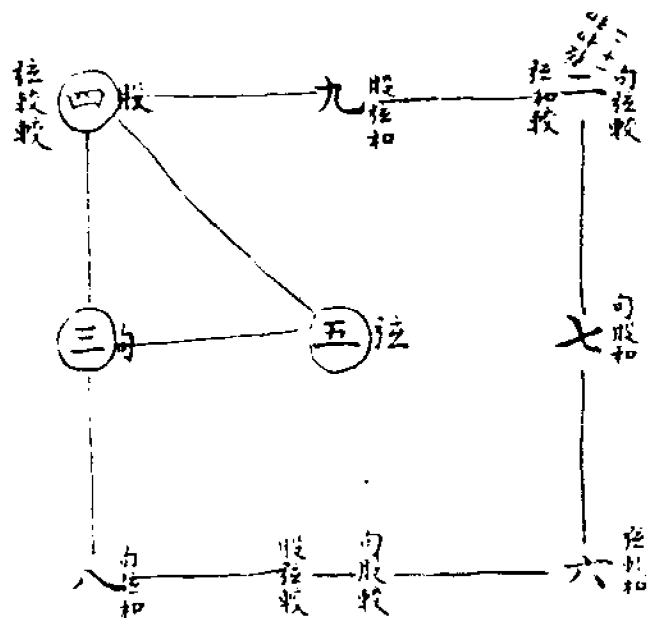
句股釋例一

數為六藝之一句股又為九數之一亦儒者所兼及也而推步測量尤所必需不知句股則推步測量不可得而學也古謂句股以御高深廣遠蓋句股可以測地亦可以窺天其理至精其用至博凡方圓三角諸形皆依句股立算雖渾圜弧曲亦必以句股直線算之虛空中絕無句股之迹亦可尋出句股算之日月星辰之高下行度之遲疾交食之淺深皆以句股御之而分

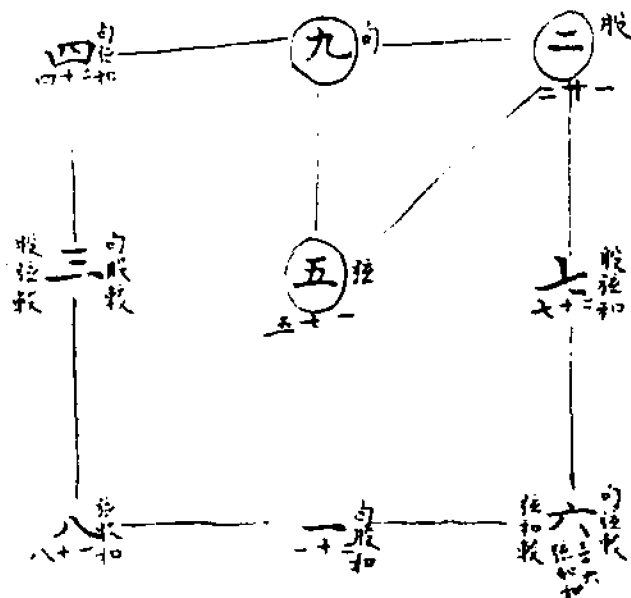
抄莫道也作句股釋例

句股出於洛書

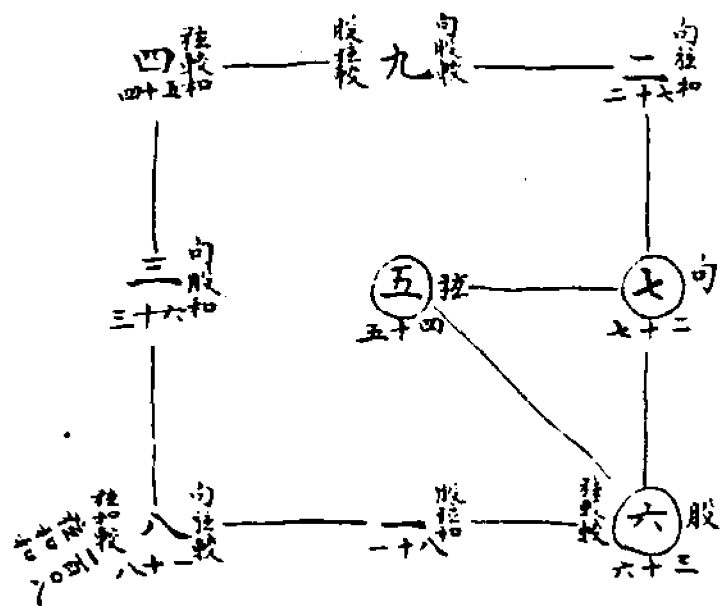
洛書為萬數之原加減乘除無不備具而尤為句股所自出中五為弦冪二十五而東之三東南之四二冪適得二十五是句股弦得整數者自句三股四弦五始句股之機括見於此矣啟蒙附論始作洛書四句股圖皆以三倍迭加之本合為一圖今更推之不止三方合為一句股也八位中五和五較皆具每易一句股則其方位皆如第一圖之次以推移依次分為四圖並詳註於其下使知天地自然之數之妙有

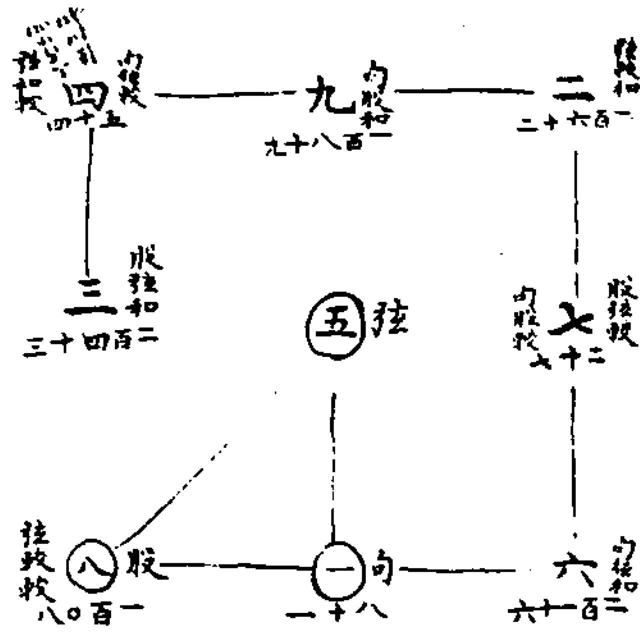


四
股
弦較較
九
股弦和
二
弦和較
句弦較
三
句
五
弦
七
句股和
八
句弦和
股弦較
句股較
六
弦和和



四
句弦和
九
句
二
股
三
股弦較
句股較
五
弦
七
股弦和
八
弦較和
一
句股和
六
弦和較
句弦較


四
四十五
九
二
二十六
三
三十六
五 弦
五十四
七 句
七十二
八
八十一
一
一十八
六 股
六十三


四
四十五
九
九十八百一
二
二十六百一
三
三十四百二
五 弦
七
七十二
八 股
八○百一
一 句
一十八
六
六十一百二

如此者

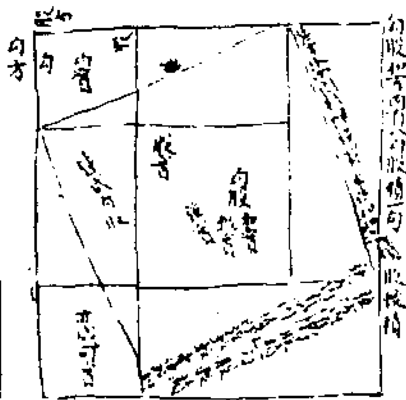
句股名義

横者為句縱者為股斜者為弦或以短邊為句長邊為股斜邊為弦又有正方形句股同長是為無較之句股但隨縱横之勢以為句股句股相併之數曰句股和句股相减之差曰句股較股弦相併曰股弦和句弦相併曰句弦和句股弦相併曰弦和和句股之差併弦曰弦較和股弦之差曰股弦較句弦之差曰句弦較併句股與弦相减之差曰弦和較弦與句股之差相减其差曰弦較較又有句和和股和和即弦

和和也同是句股弦三者之總數也又有句和較股較和即弦較和也弦較和是一弦一句股較而句和較是股弦和中少一句亦一弦一句股較股較和是一股一句弦較分句弦較之股弦較加股得一弦餘一句股較故三者之數並同也又有句較較股較較即弦和較也弦和較是句中少股弦數股中少句弦數而句較較是句中去股弦較股較較是股中去句弦較故三者如一也又有股和較句較和即弦較較也弦較較是一句一股弦較而股和較是句弦和中去一股餘一句一股弦較句較和是一句一股弦較

故三者同一數也句股弦之名三有和有較則五分之則十有三又分之則二十有一而已句股之長為線乘之為面一線自乘為方面兩線相乘為長方面方面亦謂之冪其中容受為積亦謂之實再乘為立方體而句股之數錯綜之以至於無窮焉

句股原理



如圖弦實兼句實股實凡弦方內去句實即為股實去股實即為句實合句實股實斯為弦實又弦方內有四句股

積一句股較積句股和方內有一弦方一句股較方弦方內四句股積外亦四句股積共有八句股積又中一句股較積又弦方內即弦較較乘弦較和之積弦方外即弦和較乘弦和和之積此句股之所以能相求也

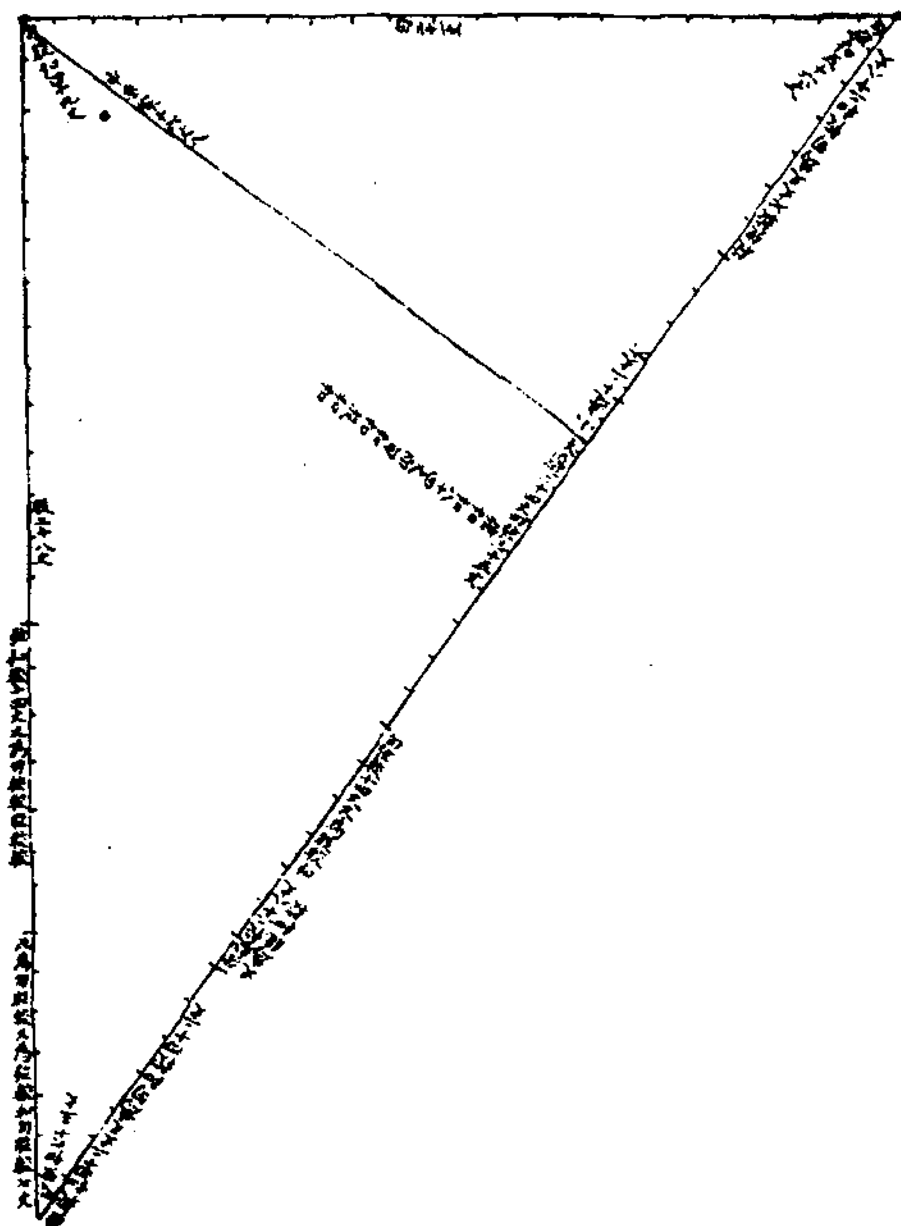
句股相求

句股求弦以句自乘得句實股自乘得股實併之得弦實開方得弦句弦求股以句自乘得句實弦自乘得弦實弦實內減句實得股實開方得股股弦求句以股自乘得股實弦自乘得弦實弦實內

減股實得句實開方得句股弦較乘股弦和為句實故句自乘以股弦較除之得股弦和以股弦和除之得股弦較句弦較乘句弦和為股實故股自乘以句弦較除之得句弦和以句弦和除之得句弦較股弦較除句實為股弦和以加股弦較折半得弦弦內減股弦較得股句弦和除股實為句弦較以加句弦和折半得弦弦內減句弦較得句又句自乘股弦較自乘相減倍較除餘實得股股自乘句弦較自乘相減倍較除餘實得句又股弦和自乘并句實倍和為法除之得弦句弦和自乘并股實倍和為法除之得弦

股弦和自乘以句實減之倍和除之得股句弦和自
乘以股實減之倍和除之得句又弦自乘減四句股
積餘數開方得句股較弦實減句股較實餘數折半
以較為縱用帶縱較數法開之得句股句股和自乘
減八因積餘數開方得句股較弦實與句股和實相
減再相減餘為句股較實開方得句股較弦實減句
股較實復加弦實為句股和實開方得句股和加較
折半得股股減較得句倍弦實減句股和實得句股
較實若減較實亦得和實弦去句股較為弦較較弦
方減去句股較方即四因積以弦較較除之得弦較

和弦較和除之亦得弦較較句股和方內減弦積餘
為四句股積即弦和較乘弦和和之積以弦和較除
之得弦和和弦和和除之亦得弦和較又弦和和積
減四因積餘數折半弦和和除之得弦弦和較積減
四因積餘數折半弦和較除之得弦句股和股弦和
相乘倍之開方得弦和和句股較股弦較相乘倍之
開方得弦和較又句股和弦較較相加自乘向股和
自乘兩數相減折半求長濶和用帶縱和數法開之
得句股弦又句弦和股弦和相乘倍之開方以和減
之得句股弦又以句股併弦和和弦較較弦較和求



之並得諸數

假如句二十一丈股二十八丈求弦

句自乘得句實　四百四十一丈

股自乘得股實　七百八十四丈

併之得弦實　一千二百二十五丈為商實

開方初商三減積九百餘三百二十五丈為次商實

倍初商三作六為廉法用六籌加平方籌上為廉隅

共法次商五減積恰盡開得方根三十五丈為弦

假如句二十一丈弦三十五丈求股

句自乘得句實　四百四十一丈

弦自乘得弦實　一千二百二十五丈
弦實內減句實餘為股實　七百八十四丈為商實
開方初商二減積四百餘三百八十四丈為次商實
倍初商二作四為廉法用四籌加平方籌上為廉隅
共法次商八減積恰盡開得方根二十八丈為股
假如股二十八丈弦三十五丈求句
股自乘得股實　七百八十四丈
弦自乘得弦實　一千二百二十五丈
弦實內減股實餘為句實　四百四十一丈為商實
開方初商二減積四百餘四十一丈為次商實倍初

商二作四為廉法用四籌加平方籌上為廉隅共法

次商一減積恰盡開得方根二十一丈為句

假如股弦和六十三丈股弦較七丈求句

和較相乘得句實　四百四十一丈

開方得二十一丈為句

假如句弦和五十六丈句弦較十四丈求股

和較相乘得股實　七百八十四丈

開方得二十八丈為股

假如句二十一丈股弦較七丈求股弦和

以股弦較七丈為法以句自乘得四百四十一丈為

實求得六十三丈為股弦和
假如句二十一丈股弦和六十三丈求股弦較
以股弦和六十三丈為法以句自乘得四百四十一
丈為實求得七丈為股弦較
假如股二十八丈句弦較十四丈求句弦和
以股實七百八十四丈為實以句弦較十四丈除之
得五十六丈為句弦和
假如股二十八丈句弦和五十六丈求句弦較
以股實七百八十四丈為實以句弦和五十六丈除
之得十四丈為句弦較

假如句二十一丈股弦較七丈求弦求股
以股弦較七丈除句實四百四十一丈得股弦和六
十三丈以加股弦較七丈得七十丈折半得三十五
丈為弦弦內減股弦較七丈餘二十八丈為股
假如股二十八丈句弦和五十六丈求弦求句
以句弦和五十六丈除股實七百八十四丈得句弦
較十四丈以加句弦和五十六丈得七十丈折半得
三十五丈為弦弦內減句弦較十四丈餘二十一丈
為句
假如句二十一丈股弦較七丈求股

句自乘得句實　四百四十一丈

股弦較自乘得較實　四十九丈

相減餘三百九十二丈為實倍較七丈作十四丈除之得二十八丈為股

假如股二十八丈句弦較十四丈求句

股自乘得股實　七百八十四丈

句弦較自乘得較實　一百九十六丈

相減餘五百八十八丈為實倍較十四丈作二十八丈除之得二十一丈為句

假如句二十一丈股弦和六十三丈求弦

句自乘得句實　四百四十一丈

股弦和自乘得和實　三千九百六十九丈

相併得四千四百一十丈為實倍和六十三丈作一百二十六丈除之得三十五丈為弦

假如股二十八丈句弦和五十六丈求弦

股自乘得股實　七百八十四丈

句弦和自乘得和實　三千一百三十六丈

相併得三千九百二十丈為實倍和五十六丈作一百一十二丈除之得三十五丈為弦

假如句二十一丈股弦和六十三丈求股

以句實四百四十一丈減股弦和實三千九百六十
九丈餘三千五百二十八丈倍和作一百二十六丈
除之得二十八丈為股

假如股二十八丈句弦和五十六丈求句
以股實七百八十四丈減句弦和實三千一百三十
六丈餘二千三百五十二丈為實倍和一一二除之
得二十一丈為句

假如弦三十五丈句股積二百九十四丈求句股較
弦自乘得弦實一千二百二十五丈
減四句股積一千一百七十六丈餘四十九丈為實

開方得七丈為句股較

假如弦三十五丈句股較七丈求句股

弦實一千二百二十五丈減句股較實四十九丈餘一千一百七十六丈折半得兩句股積五百八十八丈為句股相乘長方以句股較七丈為縱用開帶縱較數法開之

以較七丈折半作三丈五尺自乘得一十二丈二十五尺與兩句股積相加得六百丈○○二十五尺為商實初商二減積四百餘二百丈○○二十五尺為次商實次倍初商二作四為廉法用四籌加平方籌

上為廉隅共法次商四減積一百七十六丈餘二十四丈二十五尺為三商實次倍初商二三商四共作四八為廉法用四八兩籌加平方籌上為廉隅共法三商五減積恰盡開得二十四丈五尺加半較三丈五尺得二十八丈為股減半較三丈五尺得二十一丈為勾

假如句股和四十九丈句股積二百九十四丈求句股較

句股和自乘得和實二千四百〇一丈

減八句股積二千三百五十二丈餘四十九丈為實

開方得七丈為句股較

假如弦三十五丈句股和四十九丈求句股較

句股和實二千四百〇一丈減弦實一千二百二十五丈餘一千一百七十六丈又於弦實內減去一千一百七十六丈餘四十九丈開方得七丈為句股較

假如弦三十五丈句股較七丈求句股和求句求股

弦實一千二百二十五丈減句股較實四十九丈餘一千一百七十六丈復加弦實一千二百二十五丈得二千四百〇一丈開方得四十九丈為句股和加句股較七丈得五十六丈折半得二十八丈為股

股減句股較七丈餘二十一丈為句

減句股較七丈餘四十二丈折半得二十一丈為句

句加句股較七丈得二十八丈為股

假如句股積二百九十四丈弦較較二十八丈求弦

較和求弦求句股較

句股積四因得一千一百七十六丈為實弦較較二

十八丈除之得四十二丈為弦較和

加弦較較二十八丈得七十丈折半得三十五丈為

弦

減弦較較二十八丈餘十四丈折半得七丈為句股

較

假如句股積二百九十四丈弦和和八十四丈求弦和較求句股和求弦

句股四因積一千一百七十六丈為實弦和和八十四丈除之得十四丈為弦和較

加弦和和八十四丈得九十八丈折半得四十九丈為句股和

又以弦和較減句股和餘三十五丈為弦

又法弦和和八十四丈自乘得七千〇五十六丈減四因句股積一千一百七十六丈餘五千八百八十

丈折半得二千九百四十丈為實以弦和和八十四丈除之得三丈五丈為弦

假如句弦和五十六丈股弦和六十三丈求弦和和

句弦和五十六丈與股弦和六十三丈相乘得三千五百二十八丈倍之得七千〇五十六丈為實

開方得八十四丈為弦和和

假如句股和四十九丈弦較較二十八丈求句股弦

兩數相加為兩句一弦共數七十七丈自乘得五千九百一十九丈

句股和自乘得二千四百〇一丈

相減餘三千五百一十八丈折半得一千七百五十五丈為長方積
以弦較較二十八丈與兩弦一句共數相加得一百〇五丈為長濶和用帶縱和數法開之
先求半較用一百〇五丈折半作五十二丈五尺自乘得二千七百五十六丈二十五尺與積相減餘一千〇〇一丈二十五尺為商實初商三減積九百餘一百〇一丈二十五尺為次商實次倍初商用六籌加平方籌上次商一減積六十一丈餘四十丈〇二十五尺為三商實次倍初商次商用六二兩籌加平

方籌上三商五減積三十一丈二十五尺餘九丈未盡約開整數三十一丈五尺與半和相減餘二十一丈為句句與句股和相減餘二十八丈為股以句股較七丈加弦較較得三十五丈為弦

假如句弦和五十六丈股弦和六十三丈求句股弦

兩和相乘得三千五百二十八丈倍之得七千〇五十六丈開方得八十四丈為弦和和

以股弦和六十三丈減之餘二十一丈為句

以句弦和五十六丈減之餘二十八丈為股

以句股和四十九丈減之餘三十五丈為弦

假如股弦較七丈句弦較十四丈求句股弦
二較相乘得九十八丈倍之得一百九十六丈開方
得十四丈為弦和較
加句弦較十四丈得二十八丈為股
加股弦較七丈得二十一丈為句
以句弦較加句以股弦較加股並得三十五丈為弦
假如股二十八丈弦和和八十四丈求句弦和較
股實七百八十四丈以股二十八丈減弦和和八十
四丈餘五十六丈即句弦和為法除之得十四丈為
句弦較與句弦和相減餘四十二丈折半得二十一

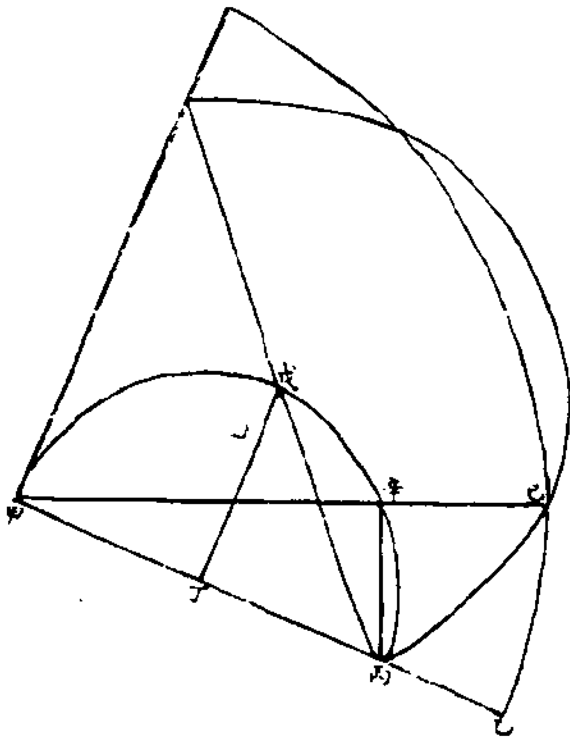
丈為句與句弦和相加得七十丈折半得三十五丈為弦

假如股二十八丈弦較較二十八丈求句弦和較股實七百八十四丈以股併弦較較得五十六丈即句弦和為法除之得十四丈為句弦較與句弦和相減折半得句相加折半得弦

假如句二十一丈弦和和八十四丈求股求弦句實四百四十一丈以句減弦和和得六十三丈即股弦和為法除之得七丈為股弦較與股弦和相加折半得三十五丈為弦相減折半得二十八丈為股

假如句二十一丈弦較和四十二丈求股求弦

句實四百四十一丈以句併弦較和得六十三丈即股弦和為法除之得七丈為股弦較與股弦和相加折半得弦相減折半得股



弦與句股和求句股以圖代算

假如弦三十五丈句股和四十九丈求句股

法先作甲丙弦三十五丈引之至乙為甲乙句

股和四十九丈因以甲為心儘乙為界運規作一象限又以丙甲弦半之於丁以丁為心儘丙為界作丙戊甲半圜次自丁作垂線分半圜於戊以戊為心用丙為界運規作大半圜大半圜與象限相割於己從己向甲作直線割小半圜於辛乃作辛丙為句恰得二十一丈即辛甲為股恰得二十八丈與得之算法者不殊

句股求積

假如句二十一丈股二十八丈求面積

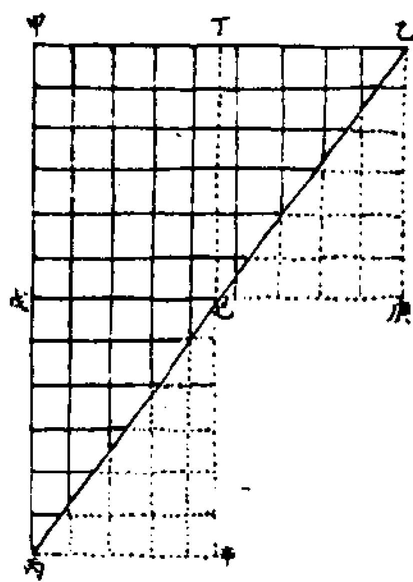
以句二十一丈與股二十八丈相乘得五百八十八

丈為長方面即為兩句股積折半得二百九十四丈
為句股面積
或先將股折半作十四乘句二十一或先將句折半
作一〇五乘股二十八並得二百九十四為面積
假如弦三十五丈句股較七丈求句股面積
弦實一千二百二十五丈句股較實四十九丈相減
餘一千一百七十六丈四歸之得二百九十四丈為
句股面積
假如弦三十五丈句股和四十九丈求面積
弦實一千二百二十五丈句股和實二千四百〇一

丈相減餘一千一百七十六丈四歸之得面積

句股求積以圖明算

假如句九股十二減甲乙句之半乙丁爲虛線丙辛是移乙丁己形爲丙辛己形以補成直長方面也按圖計之得



積五十四或減甲丙股之半戊丙爲虛線乙庚是移戊丙己形爲乙庚己形以補成橫長方面也按圖計之亦得積五十四也

句股容圓

句股和與弦相減得弦和較即容圓徑又法句股積四因之為實以弦和和除之得容圓徑

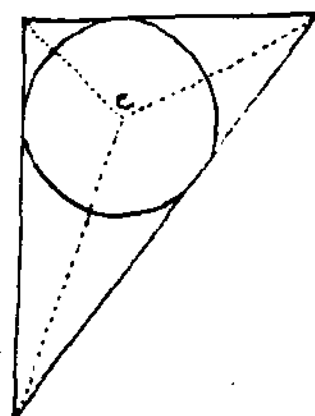
假如句二十一丈股二十八丈求容圓

句股相併為句股和四十九丈用句股求弦法求得弦三十五丈相減餘十四丈即弦和較為容圓徑

又法句股相乘得兩句股積五百八十八丈倍之得一千一百七十六丈即句股四因積以弦和和八十四丈除之得十四丈為容圓徑

又法句股相乘得五百八十八丈為實以弦和和之半四十二丈除之得十四丈為容圓徑

容圓以圓代算



假如句二十一丈股二十八丈求容圓但平分各角作綫其線相交於己己即容圓之心從心僅一邉為界運規作圓恰得圓徑十四丈與得之算法者不殊

句股容方

句股相乘得兩句股積以句股和除之得容方徑又餘句餘股相乘開方得容方邉與句股和除句股倍積數同

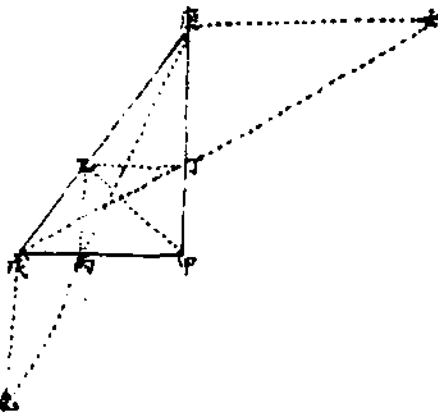
假如句二十一丈股二十八丈求容方
句股相乘得五百八十八丈為實以句股和四十九
丈除之得十二丈為容方徑
假如方外餘句九丈餘股十六丈求容方邊
餘句九丈與餘股十六丈相乘得一百四十四丈開
方得十二丈即容方邊

容方以圖代算

假如句二十一丈股二十八丈求容方但平分正角
甲作斜線至弦邊乙次從乙作乙丙乙丁兩直線恰
得方邊十二丈與得之算法者不殊

又法從戊作戊己線與甲戊等從庚作斜線至己相交於丙量得甲丙十二丈即方邊

又法從庚作庚壬線與庚甲等從戊作斜線至壬相交於丁亦量得甲丁十二丈為方邊



天學闡微卷之四

王家弼學

句股釋例二

三角名義

西法用三角猶古法之用句股也但三角有鈍角而句股無之論者遂謂句股之術有所窮殊不知鋭角形須分為兩句股鈍角形須補成句股邊角比例莫非句股也至於弧三角以直線測渾圜又於無句股中尋出句股也句股三角一而二二而一者也三角之形有三等邊有二等邊有三不等邊又有四邊形可析為兩五邊形可析為三六邊形可析為四以至

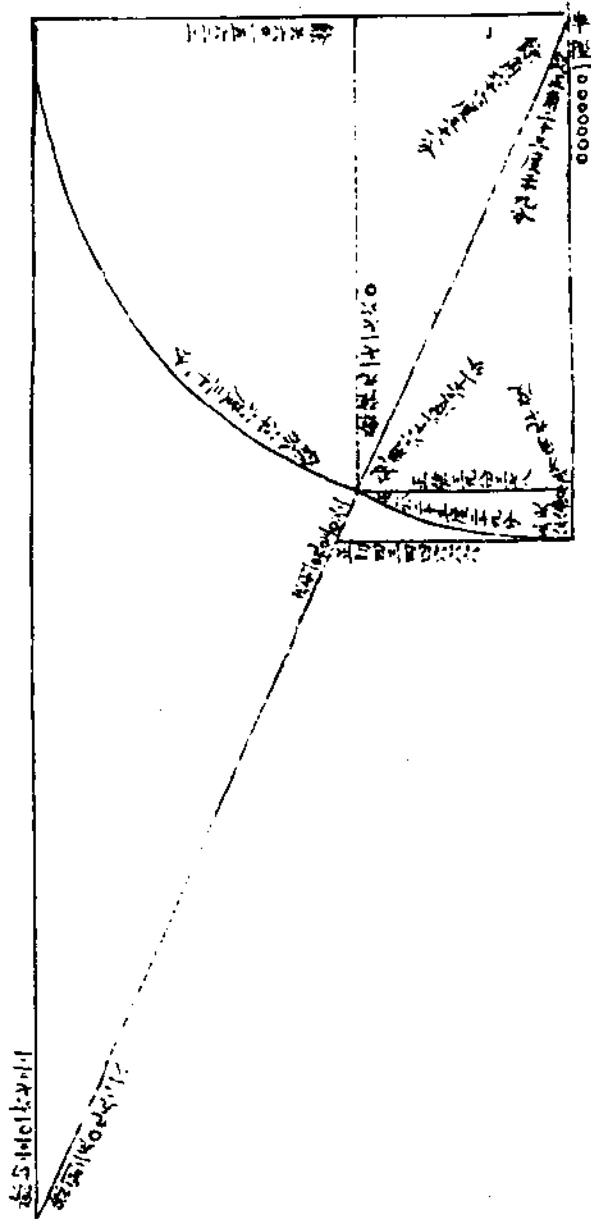
多線成形析之皆可成三角至三角則無可析矣故三角能盡諸形之理三角形有點有線有面有體點如針芒點所在即角之端也自一點引而長之至又一點止則成線矣線有弧直二種弧線以一線成圓面直線必三線以上始能成面至面與面相得而成體或方或圓其形不一此四者皆三角法中之所有也而三角法所以異於句股者以用角也凡兩線相遇則成角角有三類一正方角一鋭角一鈍角以兩線十字縱橫相遇皆為正方角亦曰直角亦曰方角以兩線斜相遇則一為鋭角一為鈍角凡鋭角必小

於正方角凡鈍角必大於正方角正方角止一銳角鈍角則有多種角無丈尺可言必量之以對角之弧法以角之端為圜心用規作圜圜周分三百六十度乃視本角所對之弧于全圜三百六十度中得幾何度分其弧分所對正得九十度者為正方角若所對弧分不滿九十度者為銳角自八十九度以至一度並銳角也所對弧分在九十度以上者為鈍角自九十一度至百七十九度並鈍角也

三角八線

角之度生於割圜弧矢者古人割圜之法也所割圜

分如弓之曲謂之弧背以弧背半之則為半弧背割
圓直線如弓之弦謂之通弦通弦半之謂之半弧弦
今曰正弦正弦以十字截半徑成矢謂之正矢全徑



內減去正矢餘謂之大矢所用之弧度為正弧以正弧減象限為餘弧正弧所對為正角餘弧所對為餘角有正弧正角即有正弦有正矢亦即有餘弦有餘矢每一弧一角各有正弦餘弦正矢餘矢已成四線於平圓內古人用句股割員即此法也盖此四線已成倒順二句股再引半徑透于平員之外與切員直線相遇為割線切線而各有正餘復成四線正割正切餘割餘切復成倒順二句股平員內外共為八線凡用一角即對一弧即有八線弧亦然凡一弧之八線即成倒順四句股角亦然凡三角形併三角之度

皆成兩象限共一百八十度句股形有一角即知餘角其形原有正方角九十度則餘兩角共九十度三角形有兩角即知餘角併兩角以減半周一百八十度得之鈍角不立正弦以鈍角減半周得外角即以外角之正弦為正弦亦即以外角之餘弦為餘弦鈍角之弧為過弧其弧越象限弧而過之也矢為大矢其矢得大半圓之徑也鈍角與外角同用正弦餘弦所不同者惟矢鈍角用大矢外角用正矢也八線起初度一分至八十九度五十九分並有正弦而九十度無正弦非無正弦也即以半徑全數為正弦也故

凡算三角有用半徑與正弦相為比例者皆以半徑為正角之正弦其法與鋭角鈍角用兩正弦為比例者同也

三角算例

凡三角形有三類曰直角三邊形即句股也有正方角一餘並鋭曰鋭角形三角並鋭曰鈍角形三角內有鈍角一餘並鋭

句股形有一角一邊求餘角餘邊

假如壬癸丁句股形有丁角五十七度壬丁弦九十一丈八尺求餘邊餘角

一求丁癸邊以半徑全數比丁角之餘弦若壬丁弦與癸丁句

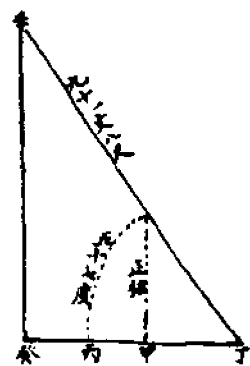
一率原設弦半徑　一〇〇〇〇〇〇〇

二率原設句丁角五十七度餘弦　〇五四四六三九〇

三率今有弦壬丁邊　九十一丈八尺

四率今所求句癸丁邊　四十九丈九尺九寸七分

一求壬癸邊以半徑比丁角之正弦若壬丁弦與



壬癸股

一率原設弦半徑 一〇〇〇〇〇〇

二率原設弦丁角五十七度正弦〇八三八六七〇六

三率今有弦壬丁邊 九十一丈八尺

四率今所求股壬癸邊 七十六丈九尺八寸九分

一求壬角以丁角五十七度減象限九十度餘三十三度為壬角

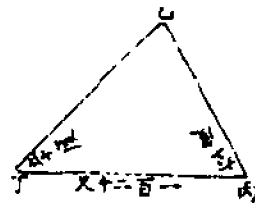
句股形有邊求角

假如壬癸丁句股形有壬丁弦一百〇二丈二尺癸丁句四十八丈求二角一邊一求丁角以壬丁弦比

癸丁句若半徑乙丁與丁角之餘弦甲丁一率壬丁邊一百〇二丈二尺二率癸丁邊四十八丈三率半徑一〇〇〇〇〇〇〇四率丁角餘弦〇四六九六六七二查表得六十一度五十九分一十四秒為丁角一求壬癸邊以半徑比丁角之正弦若壬丁弦與壬癸股一率半徑二率六十一度五十九分一十四秒正弦〇八八二八四五六三率壬丁邊四率壬癸邊九十丈〇二尺二寸六分八釐一求壬角以丁角六十一度五十九分一十四秒減象限餘二十八度〇四十六秒為壬角

鋭角形有兩角一邊求餘角餘邊

假如乙丙丁鋭角形有丙角六十度丁角五十度丙丁邊一百二十尺



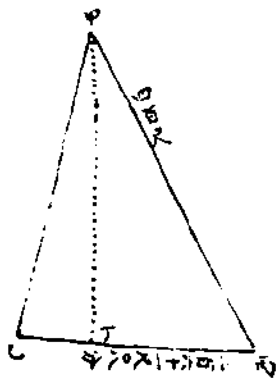
先求乙角以丙角丁角併之得一百一十度減半周得乙角七十度次求乙丁邊以乙角正弦比丙丁邊若丙角正弦與乙丁邊一率乙角正弦九三九六九二六二率丙丁邊三率丙角正弦八六六〇二五四四率乙丁邊一百一十四尺九寸二分次求乙丙邊

以乙角正弦比丙丁邊若丁角正弦與乙丙邊一率乙角正弦二率丙丁邊三率丁角正弦七六六〇四四四四率乙丙邊九十七尺八寸二分

銳角形有一角兩邊求餘角餘邊

假如甲乙丙銳角形有甲丙邊四百尺乙丙邊二百六十一尺〇八分丙角六十度角在兩邊之中不與邊對求甲乙邊　先求中長線分為兩句股形

以半徑比丙角正弦若甲丙邊與甲丁中長線



一率半徑　一〇〇〇〇〇〇〇

二率丙角六十度正弦　〇八六六〇二五四

三率甲丙邊　四百尺

四率甲丁中長線　三百四十六尺四寸〇八釐

次求丙丁邊即所分甲丁丙形之句而甲丙為之弦以半徑比丙角餘弦若甲丙邊與丙丁邊

一率半徑　一〇〇〇〇〇〇〇

二率丙角六十度餘弦　〇五〇〇〇〇〇〇

三率甲丙邊　四百尺

四率甲丁邊　二百尺

次求乙丁邊以丙丁減丙乙餘六十一尺〇八分為乙丁邊

次求丁甲乙分角即分形甲丁乙句股之甲角以甲丁中長線比乙丁分邊若半徑與甲分角切線

一率甲丁中長線　三百四十六尺四寸一分

二率乙丁分邊　〇六十一尺〇八分

三率半徑　一〇〇〇〇〇

四率甲分角切線　〇一七六三二二八得十一度欠五微

末求甲乙邊以半徑比甲分角割線若甲丁與甲乙邊

一率半徑　一〇〇〇〇〇〇〇

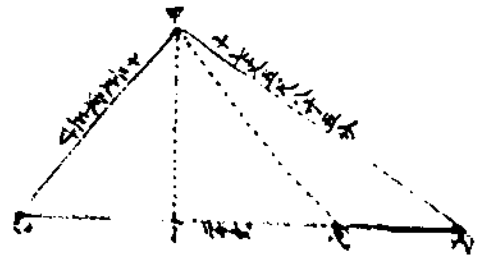
二率甲分角十度割線　一〇一五四二六七

三率甲丁中長線　三百四十六尺四寸一分

四率甲乙邊　三百五十一尺七寸五分

銳角形有三邊求角

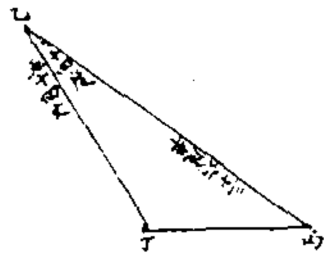
假如甲乙丙銳角形有乙丙邊二十丈甲丙邊一十七丈五尺八寸五分乙甲邊一十三丈〇五寸任以大邊為底分為兩句股形一甲丁丙形以甲丙邊為弦丁丙為句一甲丁乙形以甲乙邊為弦丁乙為句兩弦相併為總相減為較兩句相併（即乙丙邊原數）為句總



求兩句相減之數為句較以句總比弦總若弦較與句較也一兩句之總（即乙丙）二十丈二兩弦之總三十丈〇六尺三寸五分三兩弦之較四丈五尺三寸五分四兩句之較（即丙戊）六丈九尺四寸六分求分形之兩句以句較減句總餘乙戊一十三丈〇五寸四分半之得丁乙（即丁戊）六丈五尺二寸七分為甲丁乙分形之句又以戊丁加句較（即丙戊）得丁丙一十三丈七寸三分為甲丁丙分形之句求丙角以甲丙弦比丁丙句若半徑

與丙角之餘弦一甲丙邊二丁丙分邊三半徑四丙角餘弦。七八。七七九。檢表得丙角三十八度四十分。四秒五十五微求甲角先求分形大半之甲角以丙角三十八度四十分。四秒五十五微減象限餘五十一度一十九分五十五秒。五微為丁甲丙分形之甲角次求分形小半之甲角以甲乙弦比丁乙分形甲角之正弦一甲乙邊二丁乙分邊三半徑四甲分角正弦。五。。一五三二檢表得三十度。三十七秒為丁甲乙分形之甲角末併分兩甲角得甲全角八十一度二十分三十

二秒〇五微求乙角併丙甲二角以減半周得乙角五十九度五十九分二十三秒鈍角形有兩角一邊求餘角餘邊

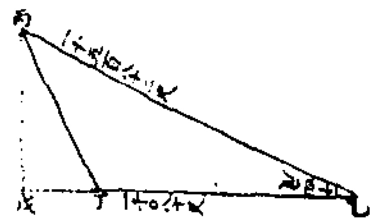


假如乙丙丁鈍角形有丙角三十六度半乙角二十四度丁乙邊五十四丈先求丁角以丙乙二角併之共六十度半以減半周得餘一百一十九度半為丁鈍角次求乙丙邊以丙角正弦比丁角正弦若乙丁邊與乙丙邊一丙角三十六度半正弦五九四八二二八二丁角一百十九度半正弦八七〇

三五五七所用丁角正弦即六十度半正弦以鈍角度減半周用之凡鈍角並同三乙丁邊四乙丙邊七十九丈○一寸三分次求丁丙邊以丙角正弦比乙角正弦若乙丁邊與丁丙邊一丙角正弦二乙角二十四度正弦四○六七三六六三乙丁邊四丁丙邊三十六丈九尺二寸四分

鈍角形有一角兩邊求餘角餘邊假如乙丁丙鈍角形有乙丁邊一千○八十尺乙丙邊一千五百八十二尺乙角二十四度角在兩邊之中不與邊對從不知之丙角作虛垂線於形外如丙戊亦引乙丁線於

形外如丁戊兩虛線遇於戊成正方角乃求丙戊垂線以半徑比乙角正弦若乙丙邊與丙戊一半徑二乙角二十四度正弦〇四〇六七三六六三乙丙邊

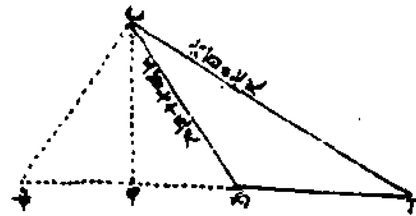


四丙戊邊即垂線〇六百四十三尺又以半徑比乙角之餘弦若乙丙邊與乙戊一半徑二乙角餘弦〇九一三五四五五三乙丙邊四乙戊邊即乙丁引長線一千四百四十五尺以原邊乙丁與引長乙戊邊相減得丁戊三百六十五尺為形外所作虛向股形之句則先得丙戊垂線為股而原邊丁丙為之弦求丁丙邊依

句股求弦術以丙戊股自乘四十一萬三千四百四十九尺丁戊句自乘一十三萬三千二百二十五尺併之得數五十四萬六千六百七十四尺為實平方開之得弦七百三十九尺為丁丙邊求丙角以丁丙邊比丁乙邊若乙角正弦與丙角正弦一丁丙邊二丁乙邊三乙角正弦四丙角正弦五九四四二得丙角三十六度二十九分求丁角併乙丙二角共六十度二十九分以減半周得餘一百一十九度三十一分為丁鈍角

鈍角形有三邊求角假如乙丙丁鈍角形有乙丙邊

三百七十五尺乙丁邊六百〇七尺丁丙邊三百尺



自乙角作垂線至甲又引丁丙線遇于甲則成乙甲丁句股形又引横線至辛使甲辛如丙甲成乙甲辛句股形則丁辛為兩句之總而丁丙邊為兩句之較又乙丁邊為大形乙甲丁之弦乙丙邊為小形乙甲辛（即乙甲丙）之弦兩弦相併為總相減為較乃以句較比弦較若弦總與句總一句較（即丁丙邊）二弦較（即乙丁內減乙丙之餘）二百三十二尺三弦總（即乙丁乙丙二邊相併）九百八十二尺四句總七百五十九尺四寸以句較

減所得句總餘數四百五十九尺四寸半之得數二百二十九尺七寸為小形之句甲丙以甲丙加丁丙較三百尺得數五百二十九尺七寸為大形之句甲丁求丁角用乙甲丁大形以乙丁弦比丁甲句若半徑與丁角之餘弦一乙丁弦六百〇七尺二甲丁句五百二十九尺七寸三半徑四丁角餘弦〇八七二六五二三得丁角二十九度一十三分五十四秒求丙角用乙甲丙小形以甲丙句比乙丙弦若半徑與丙角之割線一甲丙句二百二十九尺七寸二乙丙弦三百七十五尺三半徑四丙角割線一六四一二

七○一得丙角五十二度二十七分四十四秒為本形之丙外角以減半周得丙鈍角一百二十七度三十二分一十六秒求乙角併丁丙二角所得度分共一百五十六度四十六分一十秒以減半周得餘二十三度一十三分五十秒為乙角

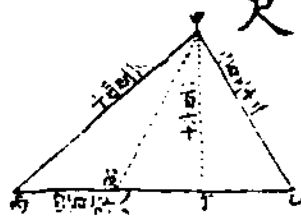
三角求積

句股形求積以句股相乘折半得積或以句折半乘股亦得積或以股折半乘句亦得積凡求平積皆謂之冪其形如網目又似窗櫺之空皆以橫直相交如十字故句股是其正法句股者方形斜剖之半也折

半則成正剖之半方形矣其他鋭角鈍角或有直無横有横無直必以法求之使成句股然後可算故句股者三角法所依以立也

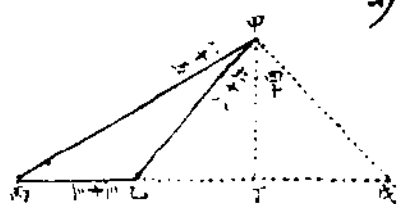
鋭角形求積假如甲乙邊二百三十二尺甲丙邊三百四十尺乙丙邊四百六十八尺求積先求垂線任以乙丙邊為底以甲丙甲乙為兩弦兩弦之較數一百零八尺總數五百七十二尺相乘六萬一千七百七十六尺為實以乙丙底為法除之得數一百三十二尺轉減乙丙餘數三百三十六尺半之得乙丁一百六十八尺依句股法以乙丁自乘二萬八千二百

二十四尺與甲乙自乘五萬三千八百二十四尺相減餘數二萬五千六百尺平方開之得甲丁垂線一百六十尺以甲丁垂線折半乘乙丙底得積凡求得鋭角形積三萬七千四百四十尺



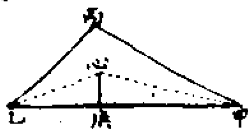
假如鈍角形求積甲乙邊五十八步甲丙邊八十五步乙丙邊三十三步求垂線立于形外以乙丙為底甲乙甲丙為兩弦總數一百四十三步較數二十七步相乘三千八百六十一步為實乙丙底為法除之

得數一百一十七步內減乙丙餘數八十四步折半四十二步為乙丁依句股法乙丁自乘一千七百六十四步甲乙自乘三千三百六十四步相減餘數一千六百步平方開之得甲丁四十步為形外垂線以乙丙底折半十六步半乘之得積凡求得鈍角形積六百六十步

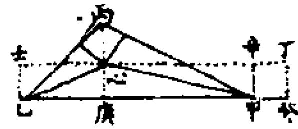


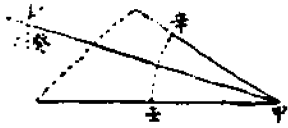
三角求積以量代算

三角求積以中垂線乘半周得積蓋凡自形心作垂線至各邊皆等故中垂線乘半周為一切有法之形所公用方員及五等面六等面至十等面以上並同故以中垂線為濶半周為長其所作長方形即與三角形等積又中垂線至邊皆十字正方角即分各邊成句股形以乘半周得積即句股相乘折半之理



假如鈍角形乙丙邊五十八步甲乙邊一百一十七步甲丙邊八十五步求積術平分甲乙兩角各作線會于心從心作垂線至乙甲邊如心庚乃量取中

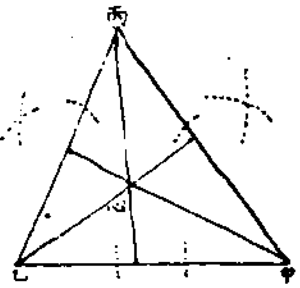




垂線庚心得數一十八步合計三邊而半之一百三十步為半周以半周乘中垂線得積二千三百四十步

又術如前取中垂庚心為濶半周為長如乙癸及丁壬別作一長方形如乙壬丁癸即與甲乙丙鈍角形等積

分角術假如有甲角欲平分之則以甲角為心作虛半規截得辛壬二點各用為心作張線相遇於癸作癸甲線即分此角為兩平分



三角求心術如上分角術于甲角平分之乙角又平分之兩平分之線必相遇成一點此一點即三角形之心

三角容員

以弦與句股求容員徑凡句股相併為和以和與弦併為弦和和以和與弦相減為弦和較弦和較即容員徑也又術以周與積求容員徑句股相乘得數為實併句股弦數為法除之得數倍之為容員徑是以弦和和除句股倍積得容員半徑也又或以句股弦數之半周除句股積得容員半徑又或以弦和和除

句股四倍積得容員全徑銳角形銳角形求容員徑用求積法以一邊為底求得中長線以乘底得數倍之為實合計三邊為法除之得容員徑是以全周除四倍積得容員徑也或以全周除倍積得容員半徑或以半周除積得容員半徑並同蓋銳角鈍角並以周為法與句股形用弦和和同但必先求中長線耳又量法以中垂線為員半徑如求積法均分二角之度各作虛線其虛線相交處即容員之心從心儘一邊為界運規作員得員半徑即得全徑矣此容員心即三角形之心故以容員半徑乘半總即得積也此

術亦句股及銳鈍兩角通用

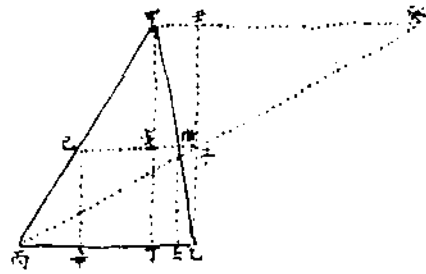
三角容方

句股形求容方依正方角而以容方之一徑切于弦其法以句股相乘得倍積為實以句股和為法除之得所求又依弦線而以容方之兩角切于句股其法以弦除倍積得對角線與弦相併為法倍積為實法除實得所求此以一邊為底中長線為高也其容方即依此一邊而以兩方角切餘二邊句股形故以弦為底若銳角形則任以一邊為底但依大邊則容方轉小亦如句股形依方角之容方必大于依弦線之

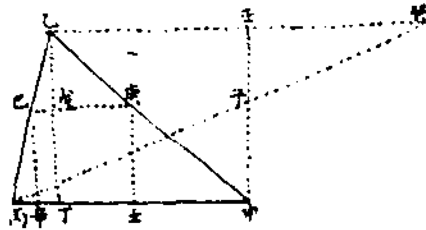
容方也鈍角形但可以大邊為底其求之則皆一法也

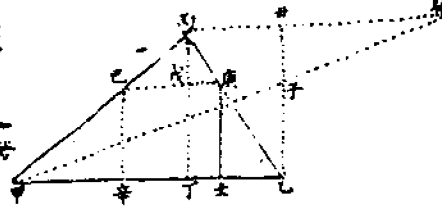
三角容方以圖算

假如銳角形求容方任以一邊為底如圖以乙丙最小邊為底先從對角甲作中長垂線至丁又從乙角作丑乙立線與甲丁平行而等乃從甲角作橫線過丑至癸截癸丑亦如甲丁乃從癸向丙角作斜線割丑乙立線於子末以子乙之度截中長線于戊即戊丁為容方之徑從戊作己庚又從己作

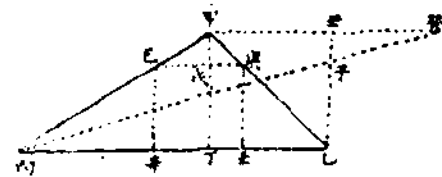


線至辛從庚作線至壬成庚巳辛壬即所求容方。

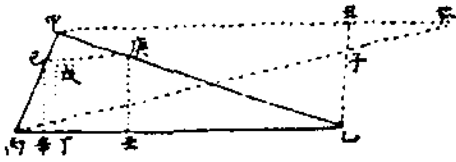




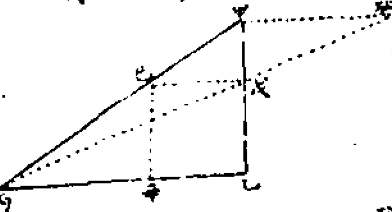
鋭角三邊皆可為底而皆一法

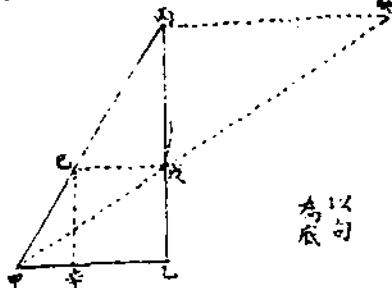


鈍角形求容方則惟有大邊可為底法同鋭角



句股形求容方以弦為底法同鈍鋭兩角

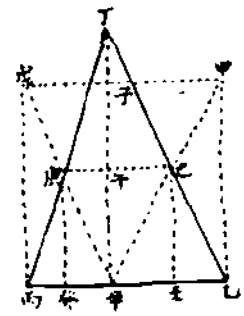


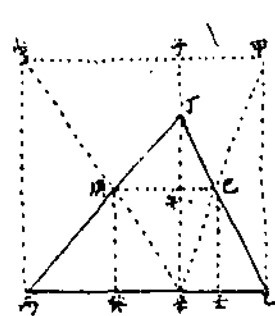


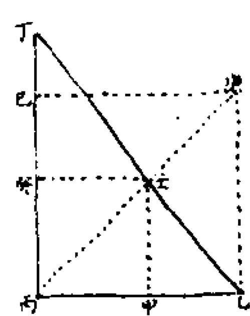
以句為底

以句股為底即截股截句為容方徑不另求中長線

又法依乙丙邊為底以乙丙底作正







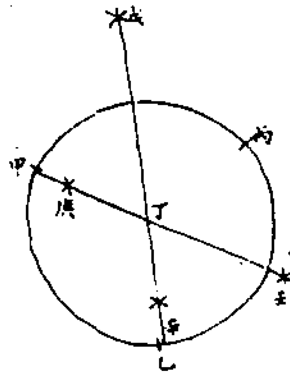
方形即甲乙丙戊方又作丁辛對角線次作甲辛戊辛兩斜線割原形之兩斜線于己于庚乃作己庚線即方邊若底上方形大則其徑亦大于對角線則如第二圖引丁辛線至于其理亦同有此二法則三邊並可為底若句股形以句為底即用乙丙句作丙辛庚乙方形從庚向丙作斜線割丁乙弦于壬從壬作癸壬甲壬二線即所容方或用股上方則引出句邊如股其法平分兩角則橫直線自相等而成

正方是容方亦用分角法也

三角外切平員

句股形外切平員之心在弦線中央故即以弦為徑以弦折半取心又法以圖算任于句或股平分之作十字正線此線過弦線之點即員心銳角形外切平員之心在形之內鈍角形外切平員之心在形之外其法任以兩邊各平分之作十字線引長之必相遇于一點即為員心鈍銳法同外切平員與容員之法不同者內容員之心即三角形之心其心能分各角為兩平分此分角求心之法所由以立也外切員之

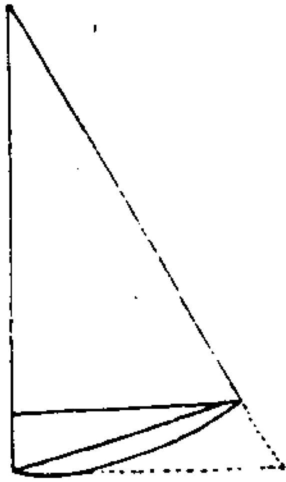
心非三角形之心其心或在形內或在形外而能以十字線剖各邉為兩平分此分邉求心之法所由以立蓋即三點串員之法也



有甲乙丙三點求串員任以甲為心作虛員分用元度以丙為心亦作虛員分兩員交相交於戊於辛作戊辛直線又任以乙為心以丙為心各作同度之虛圜分相交于庚于壬作庚壬直線兩直線相遇于丁以丁為心作圜則三點並圜周圜周有三點不知其心亦用此法

割圓求句股

割平圓為十二分成宮為二十四分成小時為九十六分成刻為三百六十分成度為二萬一千六百分成分莫不成為句股之形其正弦內之句股常以正弦為句半徑為弦半徑減正矢數即餘弦數為股正弦外又為小句股以正弦為小股正矢為小句又求得遞得之正弦為小弦若求諸弧線外則又以正切為句半徑為股正割為弦若又求其餘角則又以餘



弦為股半徑為弦半徑減餘矢數即正弦數為句餘角之孤線外又以半徑為句餘切為股餘割為弦

假如分平圓為十二宮以三十度之正弦五○○○○○○為句半徑一○○○○○○○為弦求股法以五○○○○○○自乘得二五○○○○○○○○○○○○以半徑一○○○○○○○自乘得一○○○○○○○○○○○○○○相減餘七五○○○○○○○○○○○○開方得八六六○二五四為十二宮之股即三十度之餘弦也又如以三十度之正弦為小股以餘弦減半徑數即正矢數一三

三九七四五為小句求小弦法以小股五〇〇〇〇〇自乘得二五〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇小句一三三九七四五自乘得一七九四九一六六六五〇二五相併得二六七九四九一六六六五〇二五開方得五一七六三八〇為十二宮正弦外句股形之小弦小弦折半得二五八八一九〇即二十四時十五度之正弦也

割圓求句股積

假如十五度求句股積法以十五度之正弦二五八八一九〇與其餘弦九六五九二五八相乘得二四

九九九九九四九六三○二○折半得一二四九九
九九九四八一五一○為十五度之句股積
又如十五度求弧內三角積法以十五度之弧線二
六一七九九三與半徑一○○○○○○○相乘得
二六一七九九三○○○○○○○折半得一三○
八九九六○○○○○○為十五度弧內之積

割圓求周求積

古率徑一周三夫人而知其太疏也劉徽割圓術定
為徑一尺周三尺一寸四分有奇其率最適於用而
未備也惟祖冲之定為徑一周三一四一五九二六

五趙友欽定為徑一周三一四一五九二為徑周之密率嘗試推之古人所謂徑一周三者蓋用六邊之弦線一以三乘之而止得三之一位也至十二邊之弦線五一七六三八〇以六乘之得三一〇五八二八〇二十四邊之弦線二六一〇五二四以一二乘之得三一三二六二八八四十八邊之弦線一三〇八〇六二以二四乘之得三一三九三四八八所得之三一為確數而以下未真至九十六邊之弦線六五四三八二以四八乘之得三一四一〇二三六所得之三一四一為確數而以下未真至一百九十二

邊之弦線三二七二四〇以九六乘之得三一四一五〇四〇三百八十四邊之弦線一六三六二三五以一九二乘之得三一四一五七一二〇所得之三一四一五為確數而以下猶未真也後觀西術以五一五三九六〇七五五二邊求得周孤三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四三一五四一五五此數是從六邊遞析三十三次凡用句股相求六十四盤而後得者求周至此二十七位誠可謂至確之數矣第以位數太繁仍宜截去尾數但用前八九位為常率庶幾便於推步焉耳

既得徑周密率則有徑可以求周有周可以求徑有徑有周可以求積圓徑一則周三一四一五九二六五有徑數求周者以三一四一五九二六五乘徑數得之圓周一則徑〇三一八三〇九八八有周數求徑者以〇三一八三〇九八八折周數得之圓徑一周三一四一五九二六五以周徑相乘四歸得七八五三九八一六三三七五為積或以周徑各半相乘得數亦同圓周一徑〇三一八三〇九八八以周徑相乘四歸得七九五七七四四七九七八或以周徑各半相乘得數又簡法以七八五三九八一六三三

七五為積率有徑數周數求積者但以七八五三九八一六三三七五乘徑數得之

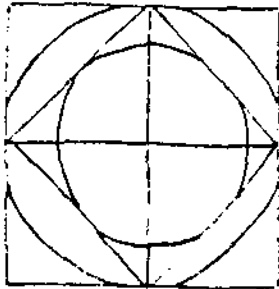
展方求斜徑

古率橫五斜七夫人而知其太疎也近時有用八線表中四十五度弦入〇七一〇六八為密率者可以為確數矣然末位究係趕進之數是其尾數亦未真也試用五千萬丈為句為股各自乘相併得五億為實開方初商七減積餘一次商空三商七減積餘一五一四商一減積餘九五九五商空六商六減積餘一一〇四七六四七商七減積餘一一四八一五一

一八商八減積餘一六七八〇三九商一減積餘二六三八一六十商一減積餘一二二三九四六十一商八減積餘九二五七五二十二商六減積餘七七二二四十三商五減積餘六五一三十四商四減積餘公五六十五商六共開至十五位得弦七千〇七十一萬〇六百七十八丈一寸八分六釐五毫四秒六忽斯為至確之數有平方積二十五者徑五展之得徑七〇七一〇六七八一一八六五四六即得倍積五十再展得徑一十即又得倍積一百再展得徑一四一四二一三五六二三七三〇九二又得倍積

二百再展得徑二十又得倍積四百再展得徑二八二八四二七一二四七四六一八四又得倍積八百再展得徑四十又得倍積一千六百再展得徑五六五六八五四二四九四九二三六八又得倍積三千二百以一與一四一四二一三五六二三七三○九二為比例截用前數位為常率遞加展方得數

方圓相容



平方內容平圓平圓內又容平方

方率徑一圍三圓率圍三一四一五九二六五平方與所容之平圓

其徑同其周若四〇〇〇〇〇〇〇〇與三一四一五九二六五也平圓與所容之平方其徑若一十〇〇〇〇〇〇〇〇〇與七〇七一〇六七八一其周若一十〇〇〇〇〇〇〇〇〇與六二八三一八五三〇也外平方與內平方其徑若一十〇〇〇〇〇〇〇〇〇若七〇七一〇六七八一其積若二與一也外平圓與內平圓其徑若一十〇〇〇〇〇〇〇〇〇與六二八三一八五三〇其積亦若二與一也

方圓周徑相求

同積較徑為方變圓圓變方之用凡方圓同積則圓

徑大方徑小其比例若一一二八三七九與一○○○○○○又若一○○○○○○與○八八六二二六也有圓徑求同積之方徑以一○○○○○○乘一一二八三七九除或以八八六二二六乘一○○○○○除並得方徑有方徑求同積之圓徑以一一二八三七九乘一○○○○○○或以一○○○○○○乘八八六二二六除並得圓徑約法以八八六二二六乘圓徑去末六位得方徑以一二二八二七九乘方徑去末六位得圓徑

同積較周凡方圓同積則圓周小方周大其比例若

一〇〇〇〇〇〇與一一二八三七九又若八八六二二六與一〇〇〇〇〇〇也約法以一一二八三七九來圓周去末六位得同積之方周以〇八八六二二六來方周去末六位得同積之圓周

同徑較積較周即方內容圓圓外切方凡方圓同徑則方積大圓積小周亦如之其比例若四〇〇〇〇〇〇〇〇與三一四一五九二六五方徑一〇〇〇〇周四〇〇〇〇積一〇〇〇〇〇〇〇〇圓徑一〇〇〇〇周三一四一五奇積〇七八五三九八一六方徑二〇〇〇〇周八〇〇〇〇積四〇〇〇〇

○○○○圓徑二○○○○周六二八三一奇積三一四一五九二六五凡徑倍者周亦倍而其積為倍数之自乘亦謂之再加比例也

同周較積較徑凡方圓同周則圓積大方積小徑亦如之其比例若四○○○○○○○○與三一四一五九二六五

方周一○○○○○○徑○二五○○○○積六二五○○○○○○○○圓周一○○○○○○徑○三一八三○九八八積七九五七七四七

○○○○方周四○○○○○○徑一○○○○○○積一○○○○○○○○○○○○圓周四○

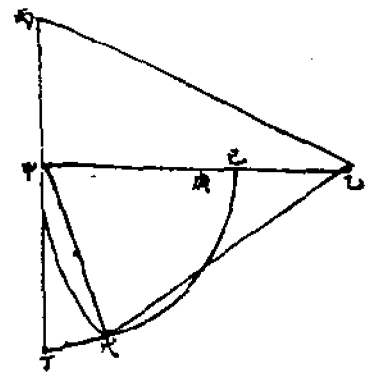
○○○○○徑一二七三二三九五四積一二七三二三九五四○○○○周四則徑與積同數但其位皆陞皆視周數之位今用百萬為周則積陞六位成萬億故似同而實懸絶也

理分中末線

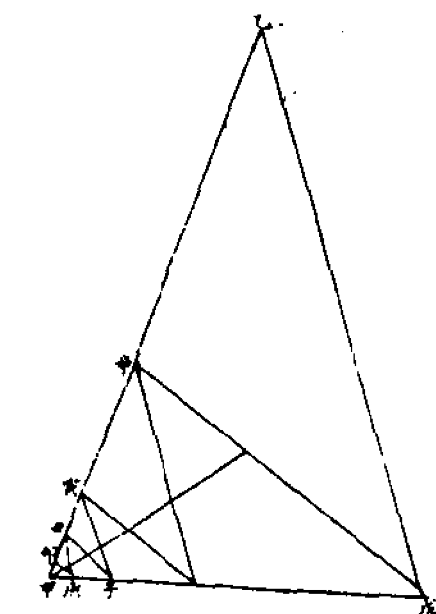
理分中末線西人謂之神分線而不知其出於河圖也河圖中宮十數為股五數為句句自乘二十五股自乘一百合冪一百二十五開方求弦得一萬一千一百八十○三三九以句五加弦為句弦和一萬六千一百八十○三三九以句五減弦為句弦較六千

一百八十〇三三九其餘為三千八百一十九六六一是股十中減去句股較之積也句弦和為全線股倍句為大分句弦較為小分句弦和與倍句若倍句與句弦較首尾相乘與中閒相乘皆一百也又以倍句為全線句弦較為大分分餘線三八一九六六一為小分其積亦皆三八一九六六一也半徑用全數如十則句弦較即十邊之通弦又以全數為股十邊之通弦為句求得弦即五邊之通弦也

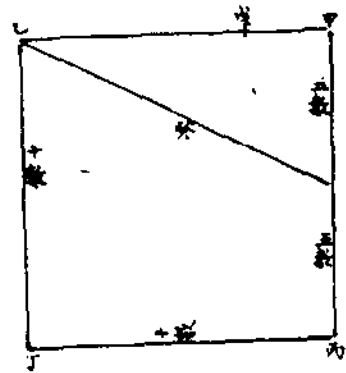
甲乙線求作理分中末線法以甲乙全線折半於庚乃作垂線於甲端為丙甲如半線甲庚之度為句全



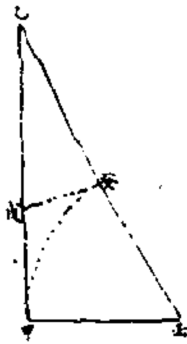
線為股次作丙乙線為弦次引丙甲線至丁令丙丁如丙乙度末為甲為心丁為界作丁戊己圜分則甲己為理分中末之大分己乙為小分其比例為甲乙與甲己若甲己與己乙也遇加法以乙為心甲為界運規截丁己圜分於戊自戊作線向甲成甲戊線與甲丁等乃自戊作戊乙線與乙甲等成甲戊乙三角形此形甲戊兩角悉倍于乙角卯古圖辰大乃平分戊角作戊辛線此線與甲戊等亦與乙辛等成辛戊甲相似三角形則甲乙與辛乙卯戊辛



若乙辛與辛甲也又平分辛角作辛壬線與壬戊辛甲皆等則成甲辛壬三角形與辛戊甲相似則乙辛與辛甲若辛甲與壬甲也如此遞半則其角比例並同一乙甲二乙辛即戊辛戊甲三辛甲即辛壬戊壬四辛癸即壬癸壬甲五癸甲即癸子壬子六癸丑即丑子子甲七丑甲即丑寅寅子八丑卯即卯寅寅甲九卯甲若能知其數則以大分遞乘全數除之得細數

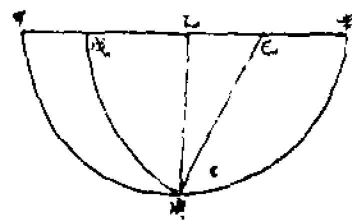


甲乙線十數求作理分中末線先依甲乙線作甲乙丁丙正方形四面皆十數次任用一面平分之如甲丙平分于壬甲乙之半數也次自壬向乙角作乙壬斜線其數一十一一八〇三三九次用甲壬度自壬截乙壬于癸其餘癸乙即大分其數六一八〇三三九末以癸乙度截甲乙於戊則乙戊為大分戊甲為小分其數三八一九六六〇



簡法作句股形令甲壬句如甲乙股之半乃以壬為心甲為界作圓

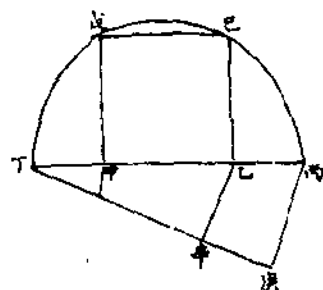
分截乙壬於癸末以心為心癸為界作圜分截甲乙于戊則乙戊為大分甲戊為小分



又簡法以甲乙全線為半徑作半圜乙庚乙辛皆與甲乙等次平分辛乙線於巳次以巳為心庚為界運規割甲乙線於戊（戊巳之度即同巳庚）則乙戊為大分甲戊為小分又用算約法設一百為全數為句半數五十為股求得一百一十一八〇三三九八為弦弦數內減半數五十餘六十一八〇三三九八為大分於全數內減大分餘三十八一九六六〇二為

半圓容方

半圓內容正方法以圓徑為三率丙丁理分中末之小分為二率庚辛理分中末全線加小分為首率丁辛為全線庚辛為小分共得為丁庚總線也二三相乘一率除之得四率丙乙即甲丁為全徑之小分以減全徑餘乙丁乃於乙作正十字線至圓界如己乙即以此線自乘作正方己甲如所求



己乙即丙乙與丁乙之中率而丙乙既為丁乙全徑之小分則己乙即大分也而甲乙亦為大分甲

丁亦為小分矣若自甲作甲戊必與己乙甲乙等而其形正方也